

제 2 교시

2021학년도 네모의꿈 직전 모의고사 문제지

수학 영역 (가형)

성명		수험 번호																		
----	--	-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

눈부시게 아름다웠던 우리들의 추억

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

네모의꿈

제 2 교시

수학 영역(가형)



5지선다형

1. $4^{\frac{1}{8}} \times \sqrt[4]{8}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln(2x - 1)}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2\ln 2}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ 1 ④ $\ln 2$ ⑤ $2\ln 2$

3. $\tan \theta = 2$ 일 때, $\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? (단, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$) [2점]

- ① $-\sqrt{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ⑤ $\sqrt{5}$

4. ${}_2H_4 + {}_3H_4 + {}_4H_4$ 의 값은? [3점]

- ① 55 ② 56 ③ 57 ④ 58 ⑤ 59

5. 첫째항이 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_4 a_6 = a_5 + 20$$

을 만족시킬 때, a_9 의 값은? [3점]

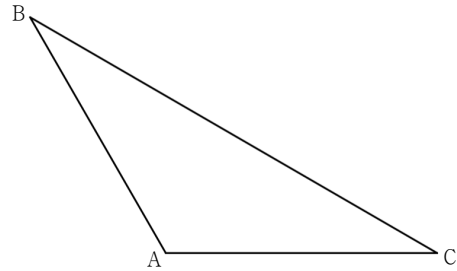
- ① 44 ② 46 ③ 48 ④ 50 ⑤ 52

6. 곡선 $e^{\frac{x}{y}} - 4y^2 \ln x = 0$ 위의 점 $(e, \frac{e}{2})$ 위에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

7. $\overline{AB} = \overline{AC} = 4$ 인 삼각형 ABC의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는? (단, $\angle BAC > \frac{\pi}{2}$) [3점]

- ① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



8. 함수

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times \left(\frac{x}{2} - 3\right)^n + 2}{2 \times \left(\frac{x}{8}\right)^n + 1}$$

에 대하여 $f(k) = 2$ 을 만족시키는 정수 k 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. 부등식

$$\log_2(x+3) > \log_4(x^2-1)$$

의 해가 $\alpha < x < \beta$ 또는 $x > \gamma$ 일 때, $\alpha\beta - \gamma$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

10. 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이고

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{4}$$

일 때, $P(A \cap B)$ 의 최댓값은? [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

11. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

을 만족시킨다. $a_2 a_3 \cdots a_k > 100$ 인 자연수 k 의 최솟값은? [3점]

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

12. 네모의꿈 팀원 8명의 소속과 민트초코 선호도는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	제작팀	검토팀
호	2	1
불호	2	3

네모의꿈 팀원 중 민트초코를 선호하는 사람과 선호하지 않는 사람을 각각 1명씩 뽑았을 때, 2명이 모두 제작팀 팀원일 확률은? [3점]

- ① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

13. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($0 \leq t < \pi$)에서의 위치 (x, y) 가

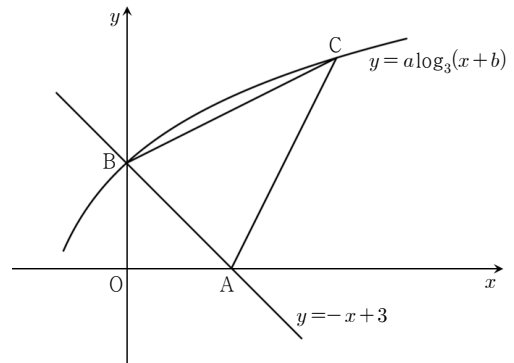
$$x = \cos t - \frac{1}{3} \cos 3t, \quad y = \sin t - \frac{1}{3} \sin 3t$$

이다. 점 P의 속력이 최대일 때, 점 P의 가속도의 크기는? [3점]

- ① $\sqrt{10}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{14}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

14. 직선 $y = -x + 3$ 이 x 축과 만나는 점을 A, y 축과 만나는 점을 B라 하자. 점 B를 지나는 곡선 $y = a \log_3(x+b)$ 위의 점 C가 $\overline{AC} = \overline{BC} = 3\sqrt{5}$ 를 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? (단, $a > 0$ 이고, 점 C는 제1사분면 위에 있다.) [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



15. 어느 알고리즘이 출력하는 숫자 X 는 평균이 m 이고, 표준편차가 4인 정규분포를 따른다. 이 알고리즘에서 임의추출한 n 개의 숫자의 표본평균을 \bar{X} 라 하면 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $P(X \leq 4) + P(\bar{X} \geq m + 4) = 1$
 (나) $0.1587 < P(\bar{X} \leq -4) < 0.8413$

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.0	0.3413
2.0	0.4772
3.0	0.4987

$m + 2n$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, m 은 정수이다.) [4점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

16. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n \frac{4}{S_k - 1} = 3 + (-1)^{n+1} \times (2n + 3)$$

이 성립할 때, $\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{a_k}$ 을 구하는 과정이다.

$n = 1$ 일 때, $a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$ 이므로 $\frac{3}{a_1} = 2$ 이다.

$n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{4}{S_n - 1} = \sum_{k=1}^n \frac{4}{S_k - 1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4}{S_k - 1} = 4 \times (-1)^{n+1} \times \boxed{\text{가}}$$

즉, $S_n = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\boxed{\text{가}}}$ 이므로

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (-1)^{n+1} \times \boxed{\text{나}}$$

이다. 한편, $n = 1$ 일 때도 위 식이 성립하므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = (-1)^{n+1} \times \boxed{\text{나}}$ 이다.

$(-1)^{n+1}$ 의 값은 n 에 따라 결정되므로 n 의 경우를 나눠서 구해야 한다.

(i) $n = 2m$

$$\sum_{k=1}^{2m} \frac{2k+1}{a_k} = - \sum_{k=1}^m \boxed{\text{다}} = - \frac{n(n+2)}{2}$$

(ii) $n = 2m+1$

(i)과 같은 방법으로 구하면

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \frac{2k+1}{a_k} = \frac{(n+1)^2}{2}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{a_k} = \begin{cases} - \frac{n(n+2)}{2} & (n = 2m) \\ \frac{(n+1)^2}{2} & (n = 2m+1) \end{cases}$$

이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(k)$ 라 할 때, $f(9) \times g(4) \times h(3)$ 의 값은? [4점]

- ① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

17. 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=0, f(\sqrt{2})=2$

(나) $\int_0^{\sqrt{2}} f'(x)f(\sqrt{4-x^2})dx=\pi+2$

$\int_0^2 f'(x)f(\sqrt{4-x^2})dx$ 의 값은? [4점]

- ① π ② $\pi+1$ ③ 2π
- ④ $2\pi+2$ ⑤ 3π

18. 실수 전체에서 도함수가 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_1^x g(t)dt = \int_0^{x^2} f(t)dt + \cos(\pi x) + 2$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 g(x)dx = -3$

ㄴ. 구간 $(0, 1)$ 에서 $g(a) < -3$ 을 만족시키는 실수 a 가 존재한다.

ㄷ. 구간 $(-1, 0)$ 에서 $g'(b) < -3$ 을 만족시키는 실수 b 가 존재한다.

- ① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 빨간색 공, 파란색 공, 노란색 공이 각각 3개씩 있다. 이 중 모든 색의 공이 적어도 하나씩 존재하도록 6개의 공을 뽑고 원형으로 배열한다. 가능한 배열 중 하나를 선택할 때, 선택한 배열이 다음 조건을 만족시킬 확률은? (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않으며, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

같은 색의 공이 서로 이웃하지 않거나 빨간색 공과 파란색 공 개수의 합이 4 이상이다.

- ① $\frac{14}{19}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{29}{38}$ ④ $\frac{59}{76}$ ⑤ $\frac{15}{19}$

20. 함수 $f(x) = \sin(\pi x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = f(f(x)) + k \quad (\text{단, } k \text{는 상수})$$

라 하자. 양수 t 에 대하여 방정식

$$\int_0^{\left\lceil \frac{2k}{t} \right\rceil} \{g(x) + tx\} dx = 0$$

을 만족하는 t 의 값을 큰 것부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, a_3, \dots 라 할 때, $a_4 = 8$ 이다. $a_8 - k$ 의 값은? [4점]

- ① 36 ② 32 ③ 28 ④ 24 ⑤ 20

21. 두 자연수 a, b 에 대하여 닫힌 구간 $[0, 4\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = a \cos(bx) + 2$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

방정식 $f(x)(f(x)-5)=0$ 의 모든 실근의 합은 170π 이다.

- ① 17 ② 24 ③ 31 ④ 38 ⑤ 45

단답형

22. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{6}\right)$ 를 따를 때, $E(7X+1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 1이 아닌 두 양수 a, b 가

$$\log_a 3 + \log_b 3 = \log_a 9 \log_b 6$$

를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x) = \pi \cos(\pi x)$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{k\pi}{n^2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 어느 고등학교 학생들의 일일 수면 시간은 평균이 m 분, 표준편차가 σ 분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중 49명을 임의추출하여 구한 일일 수면 시간의 표본평균이 260분일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이다. 이 고등학교 학생 중 196명을 다시 임의추출하여 구한 일일 수면 시간의 표본평균이 263분일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $b \leq m \leq c$ 이다. $a+c$ 의 값을 구하시오. (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.) [3점]

26. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 49이하의 자연수 n 에 대하여

$$S_{50+n} - S_{50-n} = \frac{a_n}{a_5} + 20n$$

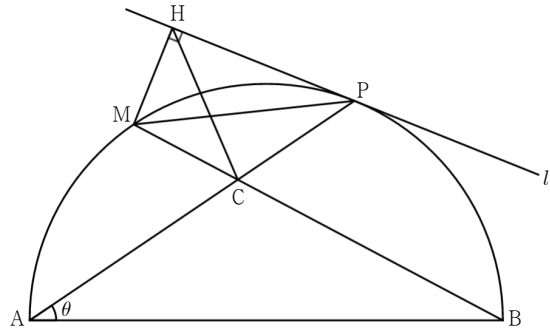
일 때, $a_k = 10$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하시오. [4점]

27. 두 이산확률변수 X, Y 가 가지는 값이 각각 1부터 4까지의 자연수이고

$$|P(X=k) - P(Y=5-k)| = \frac{1}{2} \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

이다. $E(X)=2$ 일 때, $V(Y)$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위의 점 P 가 $\angle PAB = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)를 만족시킨다. 호 AP 의 중점을 M 이라 하고 두 선분 AP 와 BM 이 만나는 점을 C 라 하자. 점 P 에서 반원에 접선 l 을 긋고, 점 M 에서 접선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\overline{CH} \times \overline{PM}}{\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)^3} = \alpha$ 일 때, 60α 의 값을 구하시오. [4점]



29. 서로 다른 3개의 상자에 공이 각각 4개, 3개, 1개씩 들어있다. 한 번에 하나의 상자를 선택하여 1개 이상의 공을 꺼낼 수 있을 때, 홀수 번 만에 8개의 공을 모두 꺼내는 경우의 수를 구하시오. (단, 공들은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

30. 실수 m 과 함수 $f(x)=(x^2+ax+b)e^{-x}$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\int_0^x\{f(t)-mt\}dt$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 는 역함수 $g^{-1}(x)$ 를 갖고, 두 함수 $g(x)$, $g^{-1}(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(-1)=0$
 (나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x)}{x} \geq \frac{1}{10}$

정수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오. [4점]

* 확인 사항
 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

2021학년도 네모의꿈 직전 모의고사 (가형) 문제지



지은이 소개

집필 : UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈

총괄 | 김범호

팀장 | 전승현

| 김태중

| 서민수

검토 : UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈

팀장 | 한성재

| 공나빈

| 방세훈

| 조인규

발행정보

발행일 | 2020. 11. 14.

발행인 | UNIST 수학모의고사 팀 네모의꿈

온라인 시행 | 오르비큐 2020. 11. 14. (토) 20:00

본 문제지에 대한 저작권은 UNIST 수학모의고사팀 네모의꿈에 있으며 저작권자의 허락 없이 전부 또는 일부를 상업적으로 이용하거나, 2차적 저작물을 작성하는 등의 저작권을 침해하는 일체의 행위는 금지되어 있습니다. 이를 어길시 저작권법에 의거 처벌받을 수 있습니다.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.